20. Flächenberechnung

20.1. Flächenberechnungsarten

Man unterscheidet vier Berechnungsarten:

1. *die P-Berechnung*,
2. *die F-Berechnung*,
3. *die FK-Berechnung*,
4. *die K-Berechnung*

Die genauesten (**p**räzisen) Ergebnisse erhält man durch die P-Berechnung. Hier werden Koordinaten der höchsten Genauigkeitsstufe des Liegenschaftskatasters verwendet.

Bei der **F**-Berechnung werden **F**eldmaße einer Orthogonalaufnahme oder Koordinaten geringerer Qualität verwendet. Im Liegenschaftskataster war diese Art der Flächenberechnung üblich, bis die Koordinaten mit der Lagegenauigkeit H eingeführt wurden.

Die **FK**-Berechnung nennt man auch halbgraphisches Verfahren; hier werden **F**eldmaße und **K**artenmaße gemeinsam verwendet. Dabei ist es wichtig, dass die Feldmaße auf das Berechnungsergebnis von überwiegendem Einfluss sind.

Die **K**-Berechnung ist das graphische Verfahren; hier werden **K**artenmaße aus einer analogen Karte eines geeigneten Kartenmaßstabs verwendet oder man digitalisiert die analoge Karte und rechnet die Flächen dann aus den digitalisierten Koordinaten.

Die Genauigkeit des halbgraphischen bzw. graphischen Verfahrens hängt im Wesentlichen von der Genauigkeit der Karte bzw. der Abgreifgenauigkeit und von der sachgerechten Auswahl der graphischen Maße ab. Im Kataster haben diese beiden Verfahren heute keine Bedeutung mehr und sollen deshalb hier auch nicht näher beschrieben werden.

20.2. Flächenberechnung aus Feldmaßen

Will man den Inhalt eines nach der Orthogonalmethode aufgemessenen Grundstücks aus Feldmaßen berechnen, so zerlegt man es zunächst in Rechenfiguren. Als Rechenfiguren werden nur Dreiecke und Trapeze benutzt. Danach stellt man für jede Rechenfigur anhand der Feldmaße und gemäß den Flächenformeln für Dreieck und Trapez die Faktoren auf.

$$\boxed{\text{Dreieck } F = \frac{g \cdot h}{2} \qquad \text{Trapez } F = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h}$$

Die Division durch 2 lässt man aber vorerst unberücksichtigt, d. h. man berechnet zunächst 2F.

Sind die Faktoren aufgestellt, so berechnet man ihre Produkte, bildet die Summe und teilt diese nun durch 2.

Die Abbildung 20.2.1 zeigt ein einfaches Beispiel

Bei der 1. Berechnung wird die ganze Fläche in **Trapeze und Dreiecke** zerlegt. Bei der 2. Berechnung zerlegt man das Grundstück in andere Rechenfiguren (meist **nur Dreiecke**), so dass sich zwangsläufig andere Faktorenpaare ergeben. Keinesfalls dürfen bei beiden Berechnungen gleiche Faktorenpaare aufgestellt werden.

Beispiel F- Berechnung

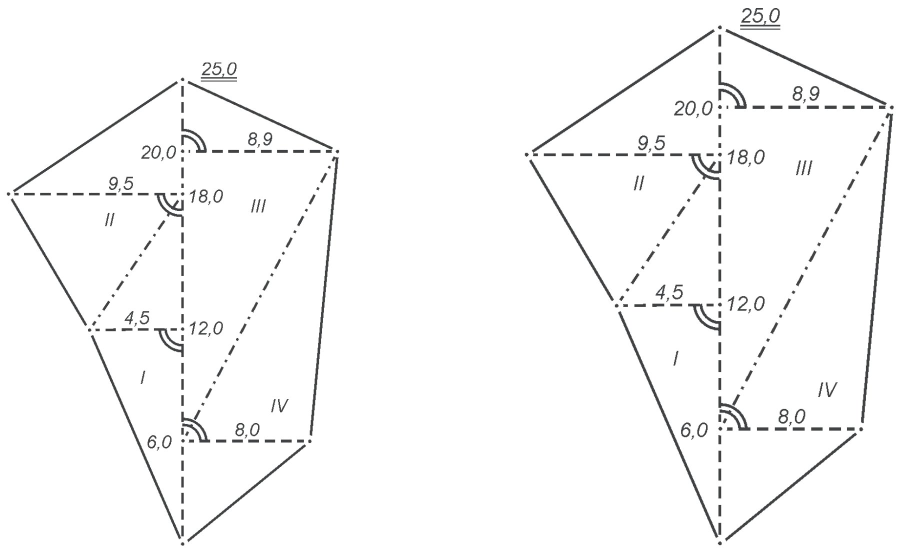


Abbildung 20.2.1.: Beispiel F-Berechnung

Zerlegung in Trapeze und Dreiecke

I	$4,5 \cdot 12,0 =$	$54,00$
II	$(4,5 + 9,5) \cdot (18,0 - 12,0) =$	$84,00$
III	$9,5 \cdot (25,0 - 18,0) =$	$66,50$
IV	$8,9 \cdot (25,0 - 20,0) =$	$44,50$
V	$(8,9 + 8,0) \cdot (20,0 - 6,0) =$	$236,60$
VI	$8,0 \cdot 6,0 =$	$48,00$
$\sum$	2F=	$533,60$
F	$\frac{1}{2} \cdot 533,60 =$	$266,80$

Flächeninhalt $= 267\,m^2$

Zerlegung nur in Dreiecke
(Dreiecke mit gleicher Höhe, d.h. an der selben Grundlinie, wurden zusammengefasst)

I	$4,5 \cdot 18,0 =$	$81,00$
II	$9,5 \cdot (25,0 - 12,0) =$	$123,50$
III	$8,9 \cdot (25,0 - 6,0) =$	$169,10$
IV	$8,0 \cdot 20,0 =$	$160,00$
$\sum$	2F=	$533,60$
F	$\frac{1}{2} \cdot 533,60 =$	$266,80$

Flächeninhalt $= 267\,m^2$

Beide Berechnungen ergeben dasselbe Ergebnis (durchgreifend gesichertes Ergebnis).

20.3. Flächenberechnung aus Koordinaten

Sind die Eckpunkte einer zu berechnenden Fläche in einem einheitlichen rechtwinkligen Koordinatensystem bestimmt, so lässt sich die Fläche berechnen, indem man jeweils benachbarte Punkte als Eckpunkte eines Trapezes ansieht. Die einzelnen Trapeze werden durch die Koordinatenachsen, Ordinaten, Abszissen und die Grenze gebildet. Verfolgt man in Abbildung 20.3.1 die Grenze des zu bestimmenden Flurstücks *rechtsläufig,* so ergibt sich die Fläche wie folgt:

$$
\begin{aligned}
2F = \quad & (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) \\
+ \quad & (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) \\
- \quad & (x_4 - x_5)(y_4 + y_5) \\
- \quad & (x_5 - x_1)(y_5 + y_1) \\
- \quad & (x_1 - x_2)(y_1 + y_2)
\end{aligned}
$$

Die ersten beiden Trapeze umfassen die Fläche des Flurstücks und die Flächen vom Flurstück bis zur X-Achse. Die letzten drei Trapeze umfassen die Flächen vom Flurstück bis zur X-Achse, die wieder subtrahiert werden müssen. Durch Umstellung der X-Koordinaten in der Klammer bei den letzten drei Trapezen ändern sich die Vorzeichen, so dass sich ergibt:

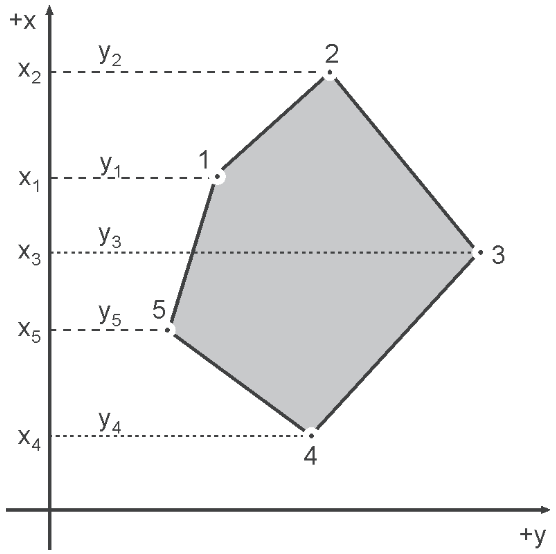


Abbildung 20.3.1.: Entwicklung der Gauß'schen Flächenformel

$$\begin{aligned} 2F = \quad & (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) \\ + \quad & (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) \\ + \quad & (x_4 - x_5)(y_4 + y_5) \\ + \quad & (x_5 - x_1)(y_5 + y_1) \\ + \quad & (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Multipliziert man die Klammerausdrücke aus und sortiert die einzelnen Glieder der Formel nach y, so erhält man

$$\begin{aligned} 2F = \quad & y_1(x_5 - x_1 + x_1 - x_2) \\ + \quad & y_2(x_1 - x_2 + x_2 - x_3) \\ + \quad & y_3(x_2 - x_3 + x_3 - x_4) \\ + \quad & y_4(x_3 - x_4 + x_4 - x_5) \\ + \quad & y_5(x_4 - x_5 + x_5 - x_1) \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} 2F = \quad & y_1(x_5 - x_2) \\ + \quad & y_2(x_1 - x_3) \\ + \quad & y_3(x_2 - x_4) \\ + \quad & y_4(x_3 - x_5) \\ + \quad & y_5(x_4 - x_1) \end{aligned}$$

oder allgemein gesagt (n: Punktnummern, rechtsläufig vergeben):

$$\boxed{2F = \Sigma\, y_n\,(x_{n-1} - x_{n+1})}$$

Berechnungsbeispiel:

Koordinaten		
Pkt.Nr.	y	x
1	85,0	10,0
2	82,0	22,0
3	84,0	36,0
4	94,0	50,0
5	124,0	43,0
6	125,0	29,0
7	110,0	16,0

Berechnungsansatz	
1	85,0·(16,0-22,0)+
2	82,0·(10,0-36,0)+
3	84,0·(22,0-50,0)+
4	94,0·(36,0-43,0)+
5	124,0·(50,0-29,0)+
6	125,0·(43,0-16,0)+
7	110,0·(29,0-10,0)
2F=	2417,00
F=	1208 m²

Ordnet man die einzelnen Glieder der Formel statt nach y nach x, so kommt man auf dem gleichen Wege zu:

$$\boxed{2F = \Sigma\, x_n\,(y_{n+1} - y_{n-1})}$$

Hiermit haben wir die beiden *Gauß'schen Dreiecksformeln* ermittelt. Üblicherweise verwendet man eine der beiden Formeln zur Erst-, die zweite zur Kontrollberechnung. Wichtig ist, dass der Rechenansatz für das (beliebige) Vieleck von Punkt zu Punkt gehend *rechtsläufig* erfolgt.

Ähnlich wie die Gauß'schen Dreiecksformeln lassen sich auch die *Gauß'schen Trapezformeln* ableiten:

$$\boxed{2F = \Sigma\,(x_n + x_{n+1}) \cdot (y_{n+1} - y_n)}$$

$$\boxed{2F = \Sigma\,(y_n + y_{n+1}) \cdot (x_n - x_{n+1})}$$

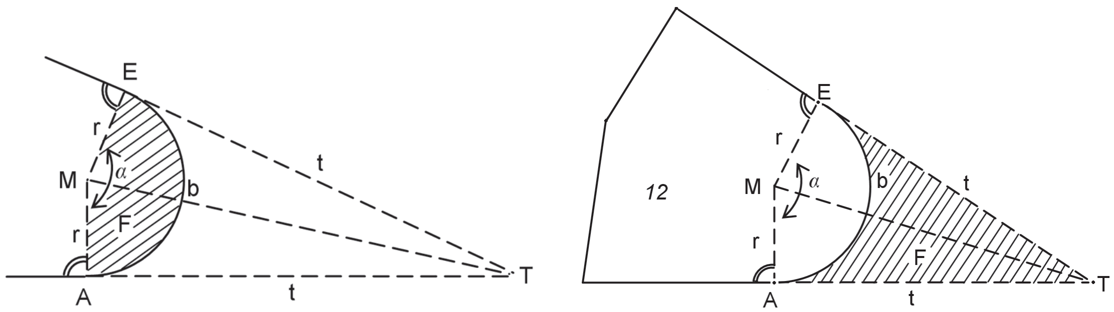
Im unserem Beispiel haben wir örtliche Koordinaten für die Flächenberechnung mit der Gauß'schen Dreiecksformel benutzt. Natürlich können mit den Gauß'schen Flächenformeln auch Flächen aus Landeskoordinaten berechnet werden. Dazu benutzt man heute ein entsprechendes Berechnungsprogramm (z. B. KIVID, Geo8, KAFKA oder KAVDI usw.).

Bei der Protokollierung der Flächenberechnung werden nachgewiesen:

1. die Punktnummer der benutzten Punkte in der entsprechenden Reihenfolge,
2. eventuell die Grenzlängen zwischen den benutzten Punkten (dient als Kontrolle),
3. die Fläche mit 2 Kommastellen,
4. die Fläche gerundet auf volle Quadratmeter.

20.4. Flächenberechnung von Kreisteilen

20.4.1. Flächenberechnung eines Kreisausschnittes



Flächenberechnung eines Kreisausschnitts — Fläche zwischen Kreisbogen und Tangenten

Abbildung 20.4.1.

Die Berechnung sei an einem Beispiel (s. Abbildung 20.4.1 links) erläutert.

Gegeben: Tangentenlänge $t = 32,50\,m$; Radius $r = 10,00\,m$

Gesucht: Fläche des Kreisausschnittes MEA

Lösung:

1. $tan\,\frac{\alpha}{2} = \frac{t}{r}$

   $tan\,\frac{\alpha}{2} = \frac{32,50}{10,00} = 3,2500$

   $\frac{\alpha}{2} = 80,997\,gon$

2. $\alpha = 161,994\,gon$

3. Es verhält sich

   $\frac{b}{r} = \frac{\alpha}{\rho}$ (vgl. Kapitel 1.4)

   dann ist

   $b = \frac{\alpha \cdot r}{\rho} \Rightarrow b = \frac{10 \cdot 161,994}{63,6620} = 25,45\,m$

4. Es verhält sich auch

   $\frac{b}{2r\pi} = \frac{F}{r^2\pi}$

5. dann ist

   $F = \frac{b \cdot r^2 \pi}{2r\pi} = \frac{b \cdot r}{2} \Rightarrow F = \frac{25,45 \cdot 10,00}{2} = 127,2\,m^2$

   F lässt sich auch ohne den Umweg über b direkt aus folgenden Proportionen berechnen:

   $\frac{\alpha}{400} = \frac{F}{r^2\pi} \Rightarrow F = \frac{\alpha \cdot r^2 \cdot \pi}{400}$

   $F = \frac{161,994 \cdot 100 \cdot \pi}{400} = 127,2\,m^2$

20.4.2. Berechnung der Fläche zwischen Kreisbogen und Tangenten

Berechnet man in Abbildung 20.4.1 rechts die Fläche des durch einen Kreisbogen begrenzten Flurstücks Nr. 12, so wird zunächst der Flächeninhalt bis zum Tangentenschnittpunkt T berechnet. Die zu viel berechnete Fläche zwischen dem Kreisbogen und den Tangenten wird anschließend abgezogen.

Die Berechnung dieser Abzugsfläche sei an einem Beispiel erläutert.

Gegeben: Tangentenlänge $t = 32,50\,m$, Radius $r = 10,00\,m$

Gesucht: schraffierte Fläche AET.

Lösung:

1. $tan\,\frac{\alpha}{2} = \frac{t}{r}$

   $\Rightarrow \quad tan\,\frac{\alpha}{2} = \frac{32,50}{10,00} = 3,2500$

   $\Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 80,997\,gon$

   $\Rightarrow \quad \alpha = 161,994\,gon$

2. $b = \frac{r \cdot \alpha}{\rho}$

   $\Rightarrow \quad b = 25,45\,m$

3. Inhalt der Fläche AET:

   $\Rightarrow \quad F = \frac{2 \cdot r \cdot t}{2} - \frac{b \cdot r}{2}$

   $\Rightarrow \quad F = r \cdot t - \frac{b \cdot r}{2}$

   $\Rightarrow \quad F = r\left(t - \frac{b}{2}\right)$

   $F = 10,00\,(32,50 - 12,72)$

   $F = 197,80\,m^2$